ЛЕКЦИЯ 4 ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

§1 Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению их длин (модулей), умноженному на косинус угла между ними.

Скалярное произведение принято обозначать одним из трех способов:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\vec{b} = (\vec{a}\vec{b})$$

Согласно определению имеем

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos(\bar{a}\,\widehat{\ }\,\bar{b})$$

Заметив, что $|\vec{b}|\cdot\cos(\bar{a}\,\widehat{\ }\,\bar{b})$ есть проекция вектора $\vec{b}$ на направление вектора $\vec{a}$, мы можем записать

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot np_{\bar{a}}\bar{b}$$

Аналогично,

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{b}|\cdot np_{\bar{b}}\bar{a}$$

Таким образом, скалярное произведение двух векторов равно длине одного из них, умноженной на проекцию другого вектора на первый.

Основными свойствами скалярного произведения являются следующие:

1. скалярное произведение обращается в нуль в том и только в том случае, когда векторы перпендикулярны.
2. скалярное произведение обладает свойством переместительности

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$$

3. исключительно важное значение имеет распределительный закон.

Его применение столь же велико как в арифметике, так и в алгебре. Этот закон формулируется так: для любых трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ справедливо равенство

$$(\vec{a}+\vec{b})\bar{c} = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c}$$

4. скалярное произведение обладает свойством сочетательности относительно числового множителя:

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})\lambda = \vec{a}(\lambda\vec{b})$$

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы своими координатами

$$\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\} \quad \text{и} \quad \vec{b}\{x_2, y_2, z_2\}$$

то

$$\bar{a}\bar{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

(2.1)

или скалярное произведение векторов равно сумме произведений одноименных проекций.

Применяя формулу 2.1 при $\bar{a} = \bar{b}$, найдем:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^{\,2} = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

С другой стороны, согласно определению скалярного произведения, получим

$$\bar{a}^{\,2} = |\bar{a}| \cdot |\bar{a}| \cos 0^0 = |\bar{a}|^2$$

Следовательно, мы имеем следующую формулу для определения длины вектора:

$$|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}^{\,2}} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

(2.2)

т.е. длина вектора равна корню квадратному из скалярного квадрата вектора или из суммы квадратов его проекций.

Согласно определению скалярного произведения векторов, имеем

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos(\bar{a} \hat{\ } \bar{b})$$

Из этой формулы получаем:

$$\cos(\bar{a} \hat{\ } \bar{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}$$

т.е. косинус угла между векторами равен их скалярному произведению, деленному на произведение их модулей.

Применяя формулы 2.1 и 2.2, получим:

$$\cos(\bar{a} \hat{\ } \bar{b}) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \qquad (2.3)$$

§2 Векторное произведение векторов

Векторным произведением вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется третий вектор $\bar{c}$, удовлетворяющий следующим трем условиям:

1. длина вектора $\bar{c}$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т.е.

$$|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin(\bar{a} \hat{\ } \bar{b})$$

2. вектор $\bar{c}$ ортогонален векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$

3. вектор $\bar{c}$ направлен так, что кратчайший поворот от вектора $\bar{a}$ к вектору $\bar{b}$ представлялся происходящим против часовой стрелки, если смотреть из конца вектора $\bar{c}$ (рис. 7).

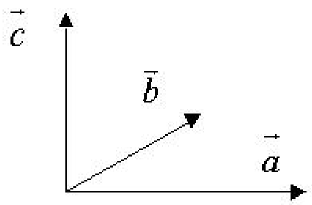

Рис.7

Векторное произведение вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ обозначается одним из двух способов: $\vec{a}\times\vec{b}$ или $\left[\overline{a}\overline{b}\right]$.

Векторное произведение векторов обладает следующими свойствами:

1. при перестановке сомножителей знак векторного произведения изменяется на противоположный, т.е.

$$\overline{a}\times\overline{b} = -\overline{b}\times\overline{a}$$

2. векторное произведение обладает свойством сочетательности относительно числового множителя, т.е.

$$\lambda\,(\overline{a}\times\overline{b}) = (\lambda\,\overline{a})\times\overline{b} = \overline{a}\times(\lambda\,\overline{b})$$

3. векторное произведение подчиняется распределительному закону, т.е.

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$$

Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ заданы своими координатами $\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$ $\vec{b}\{x_2,y_2,z_2\}$ и , то $\vec{a}\times\vec{b}$ можно записать в символической, легко запоминаемой форме, если воспользоваться понятием определителя третьего порядка:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

(3.1)

Пример 12. Найти площадь треугольника ABC с вершинами в точках $A\{x_1,y_1,z_1\}$, $B\{x_2,y_2,z_2\}$ и $C\{x_3,y_3,z_3\}$.

Решение: так как вектор $\overline{AB}$ имеет координаты $\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}$, а вектор $\overrightarrow{AC}=\{x_3-x_1;y_3-y_1;z_3-z_1\}$, то

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \vec{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{matrix}\right\| =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}^2}$$

Если треугольник ABC лежит в плоскости XOY, то $z_1=z_2=z_3=0$ и тогда

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{matrix}\right\| \tag{3.2}$$

§3 Смешанное произведение векторов.

Выясним, что можно сказать о произведении трех векторов. Если мы умножим скалярно вектор $\bar{a}$ на $\bar{b}$, то получим число (скаляр). При умножении этого числа на третий вектор $\bar{c}$, получим вектор, коллинеарный вектору $\bar{c}$.

Совсем иное будет дело, если вектор $\bar{a}$ умножим векторно на вектор $\bar{b}$, в результате получим новый вектор $\vec{a}\times\vec{b}$. Представляется интересным исследовать произведения, как скалярное, так и векторное, этого вектора на вектор $\bar{c}$. В первом случае будем иметь векторно-скалярное произведение $(\bar{a}\times\bar{b})\bar{c}$, а во втором случае – двойное векторное произведение $(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}$. Векторно-скалярное произведение называется также смешанным произведением и обозначается $(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$ или $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$. Уясним геометрический смысл смешанного произведения векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

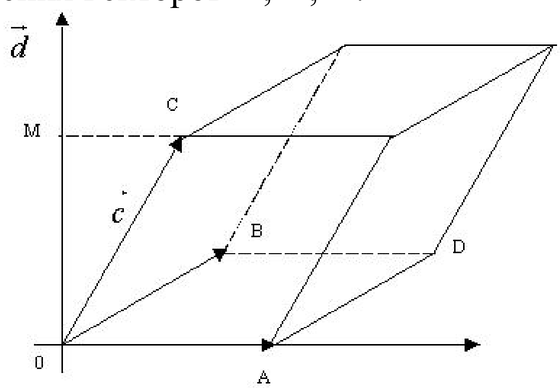

Рис.8

Пусть рассматриваемые векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ некомпланарны. Векторное произведение $\bar{d} = \bar{a}\times\bar{b}$ есть вектор, по длине численно равный площади параллелограмма OADB, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, и направленный перпендикулярно к плоскости параллелограмма (рис. 8). Скалярное произведение $\bar{d}\cdot\bar{c} = \left|\bar{d}\right|\cdot np_{\bar{d}}\bar{c}$. Проекция вектора $\bar{c}$ на вектор $\vec{d}$ перпендикулярна к плоскости параллелограмма OADB, равна расстоянию точки *C* (конец вектора $\bar{c}$) от плоскости этого параллелограмма, взятому со знаком + или -.

Построим параллелепипед на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ как на ребрах. Высота этого параллелепипеда есть абсолютная величина проекции вектора $\bar{c}$, а площадь основания (параллелограмма OADB) численно равна длине вектора $\bar{d} = \bar{a}\times\bar{b}$.

Итак, смешанное произведение $(\overline{a}\times\overline{b})\overline{c}$ по абсолютной величине равно объему параллелепипеда, построенного на векторах-сомножителях, как на ребрах.

Смешанное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда векторы компланарны; иначе говоря, равенство $(\overline{a}\times\overline{b})\overline{c}=0$ есть необходимое и достаточное условие компланарности векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$.

Если векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ заданы своими проекциями $\vec{a}(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}(x_2,y_2,z_2)$, $\vec{c}(x_3,y_3,z_3)$, то смешанное произведение определяется формулой

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \qquad (4.1)$$

Напомним, что объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, и, следовательно, объем образованной ими пирамиды находятся соответственно по формулам:

$$V_{парал.}=\left|\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\right|, \qquad V_{пир.}=\frac{1}{6}\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|$$